Association
mathématique
du Québec

Article

Une activité entourant la notion de fonction pour favoriser le passage du secondaire au collégial

Claudia Corriveau, Université Laval,
Sarah Dufour, UQAM et Antonia Kouloumentas, Collège Maisonneuve

Résumé

Le thème des fonctions occupe une place importante dans les programmes de la fin du secondaire et dans les cours de calcul au collégial. Comme ce contenu est commun aux deux ordres, il est intéressant de s'y attarder pour comprendre les enjeux de transition qui s'y rattachent et penser à des moyens d'accompagner les élèves dans le passage au collégial. Dans ce texte, nous présentons une activité élaborée en collaboration avec des enseignants du secondaire et du collégial qui a pour objectif d'accompagner les élèves dans la transition entre les ordres. Nous exposons ensuite les résultats d'une expérimentation de cette activité en classe.

Mots clés : transition interordre, secondaire, collégial, fonction, paramètres.

Le thème des fonctions est central en mathématiques à la fin du secondaire et évidemment dans le cours de calcul différentiel du collégial. Comme ce contenu est commun aux deux ordres, il est intéressant de s'y attarder pour comprendre les enjeux de transition qui s'y rattachent et penser à des moyens d'accompagner les élèves dans le passage au collégial. Dans ce texte, nous présentons une activité élaborée en collaboration avec des enseignants du secondaire et du collégial ayant pour objectif d'accompagner les élèves dans la transition entre les ordres. Nous exposons ensuite les résultats d'une expérimentation de cette activité en classe. Mais d'abord, nous revenons sur des enjeux de transition dans le passage du secondaire au collégial en ce qui a trait aux fonctions, enjeux qui ont servi d'appui à l'élaboration de cette activité.

1 Le travail entourant les fonctions au secondaire et au collégial

Au secondaire, l'objectif est d'étudier en profondeur plusieurs familles de fonctions, à travers leurs différentes représentations (table de valeurs, graphique, écriture symbolique). Selon le programme (MELS, 2007 [5]), le travail avec les fonctions au secondaire est axé sur les activités suivantes :

- Associer un tableau de valeurs, un graphique ou une écriture symbolique à un modèle de fonction.
- Esquisser un graphique à partir d'un tableau de valeurs ou d'une écriture symbolique.
- Établir des liens entre un tableau de valeurs, un graphique ou une écriture symbolique et les caractéristiques d'une fonction.

Il est donc question, au secondaire, d'établir des liens entre les différentes représentations d'une fonction et d'en dégager des caractéristiques – symboliques, graphiques et de variation – qui lui sont propres : une identification par la règle algébrique de la fonction, une allure dans le graphique, une manière dont varient les données dans le tableau de valeurs, etc. Autrement dit, chacune des familles possède des caractéristiques qui lui sont propres.

Il y a aussi, au secondaire, un travail important avec les paramètres. Les fonctions de base sont d'abord introduites (ex. $f(x) = c^x$) et ensuite, une symbolisation avec tous les paramètres (ex.$f(x) = a \cdot c^{b(x-h)} + k$) permet un arrimage entre la représentation symbolique et la représentation graphique. Des liens sont établis entre l'écriture d'une fonction sous forme canonique et son graphique. Chaque paramètre est associé à un effet, une transformation, dans le graphique (par rapport au graphique de la fonction de base). Ainsi, les paramètres multiplicatifs a et b provoquent des dilatations ou contractions verticale et horizontale alors que les paramètres additifs h et k provoquent respectivement des translations horizontale et verticale.

Au collégial, le travail est centré sur l'étude des caractéristiques locales d'une fonction. Cette étude et la construction du graphique d'une fonction passent par un certain nombre d'outils (dérivée, limite, continuité, etc.). Le travail avec les fonctions est axé sur les éléments suivants :

- Retrouver le comportement de n'importe quelle fonction à partir d'une expression algébrique.
- Mobiliser des outils (ex. la dérivée) pour repérer le comportement d'une fonction et pour tracer le graphique.
- Anticiper les comportements limites d'une fonction en tout point, à partir d'une expression algébrique ou d'un graphique.

Au collégial, il est donc question de reconstituer la fonction (graphiquement) à l'aide d'indices et d'outils. Il ne s'agit plus d'identifier un type de fonction comme c'est le cas au secondaire, mais de retrouver le comportement d'une fonction plus complexe et de prévoir ses comportements limites à partir d'une expression symbolique. De plus, plutôt que s'attacher aux caractéristiques particulières des fonctions comme c'est le cas au secondaire (le sommet d'une fonction quadratique ou encore la caractéristique de variation de la fonction exponentielle), on s'intéresse aux caractéristiques générales des fonctions, de toutes fonctions. Ainsi, lorsqu'on présente une fonction quelconque dans un graphique (ou lorsqu'on demande aux étudiants d'en produire un) on doit mettre en évidence les possibilités de discontinuités, de changement de variations, etc.

S'il semble aller de soi que le cours de calcul différentiel au collégial se situe dans une certaine continuité avec les cours du secondaire, il existe néanmoins des différences notables. D'abord, le travail important fait avec les paramètres au secondaire n'est pas repris au collégial. Ensuite, la manière de conceptualiser les fonctions est certainement teintée du travail fait avec celles-ci. On peut s'inspirer des travaux de Vandebrouck (2011 [6]), faits dans le contexte français, pour retrouver autant au secondaire qu'au collégial québécois des domaines très proches de travail de la fonction.

- Premier domaine de travail de la fonction Des propriétés des fonctions telles que la périodicité, la croissance, les extremums, le domaine, le co-domaine, les asymptotes, sont introduites dans différentes représentations (graphique, tableau de valeurs, expression symbolique). Ces propriétés sont introduites dans un contexte de famille de fonctions (affines, quadratiques, rationnelles, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques). La conceptualisation de la fonction se fait donc à travers des fonctions spécifiques.
- Deuxième domaine de travail de la fonction Ce domaine unifie et simplifie les éléments du premier domaine. Le travail est plus algébrique que dans le premier domaine et des concepts comme la limite, la continuité et la dérivabilité sont introduits. En se référant à Coppé, Dorier et Yavuz (2007 [1]), Vandebrouck explique qu'à ce niveau, il existe une forte algébrisation des techniques, basée sur les règles et le calcul algébrique (évaluation des limites, dérivées, étude des variations, polynômes, exponentielle, logarithmique, etc.).

Ces domaines de travail présentent des différences importantes entre ce qui se fait à chaque ordre. D'autres différences plus implicites entraînent des enjeux de transition. Une série de petits détails tacites sont aussi à considérer (Corriveau, 2017 [2]). Par exemple, même si des concepts sont sollicités aux deux ordres, comme c'est le cas pour le concept de « domaine d'une fonction », ils sont conceptualisés différemment (voir Corriveau, 2017). La manière de donner sens au domaine d'une fonction est forcément différente de part et d'autre puisque les contextes d'utilisation sont différents. D'un côté, comme les fonctions sont connues (ce sont les fonctions de base), leur domaine l'est aussi. Il s'agit d'une des nombreuses caractéristiques de chaque famille de fonction. On enquête alors sur l'ensemble de nombres concerné, déterminé par le contexte, sur lequel est définie la fonction (souvent implicitement, à partir du contexte, discret ou continu). Au collégial, le domaine est à identifier a priori puisqu'inconnu. Il en va de même, selon nous, pour d'autres notions, telles que la variation, la croissance d'une fonction, sa positivité, sa continuité, etc. C'est avec ce type d'enjeux en tête que nous avons voulu élaborer une activité au collégial qui permettrait d'accompagner les étudiants à leur arrivée dans le cours de calcul différentiel du collégial.

2 Élaboration d'une activité de transition

Mentionnons d'abord que cette activité a été élaborée dans le cadre de rencontres à propos de la transition secondaire-collégial en mathématiques organisées par une des auteures de l'article et auxquelles des enseignants du secondaire et du collégial participaient (voir Corriveau, 2013 [4]). Nous avions l'intention de mieux comprendre les enjeux de transition, mais aussi d'organiser une transition harmonieuse entre les ordres.

2.1 Des liens à établir entre les deux ordres

Lors d'une des rencontres, nous avons noté ce qui ressortait globalement du travail avec les fonctions à chacun des deux ordres (voir figure 1). À gauche, nous avions écrit sommairement ce qui se faisait au secondaire autour des fonctions, et à droite, ce qui se faisait au collégial. La question à se poser était donc : comment au secondaire s'approcher du collégial, et au collégial, s'approcher du secondaire ?

FIGURE 1 – Schéma utilisé comme base pour l'élaboration d'une activité d'harmonisation (Corriveau, 2013, [4] p. 259)

Des discussions et des ponts se sont alors établis entre les enseignants pour qu'il y ait rapprochement entre les deux ordres. La figure 2 présente le schéma complété après discussion.

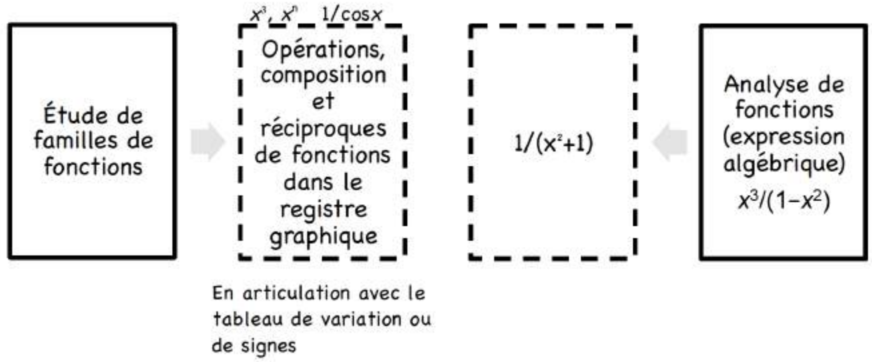


FIGURE 2 – Schéma complété pour l'élaboration d'une activité d'harmonisation (Corriveau, 2013, [4] p. 270)

La reconstruction de ce que nous avons appelé une trajectoire d'harmonisation (voir Corriveau, 2013 [4] ; 2015 [3]) a montré qu'il était possible d'identifier des « vides » à combler tant au secondaire qu'au collégial. Dans ce qui suit, nous nous centrons sur le troisième rectangle et nous nous demandons comment la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ jette un pont entre le secondaire et le collégial et introduit le travail à faire au collégial.

2.2 La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ comme pont entre le secondaire et le collégial

L'idée principale dans le passage au collégial est de comprendre qu'à la vue d'une fonction écrite sous sa forme symbolique, il n'est pas toujours possible de se référer aux familles de fonctions connues pour en déterminer l'allure du graphique. Pourtant, entre les familles de fonctions du secondaire et les outils du calcul différentiel pour l'étude de fonctions plus complexes, il y a toute une panoplie de fonctions accessibles dont l'allure peut être esquissée intuitivement, c'est-à-dire sans passer par la dérivée première et la dérivée seconde. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ correspond exactement à ce type de fonctions.

C'est donc dans l'idée de pousser plus loin le travail mené au secondaire, sans toutefois solliciter les outils du collégial, que nous nous intéressons à cette fonction.

De plus, comme les paramètres traités au secondaire lors de l'étude d'une fonction sont peu repris au collégial, alors qu'ils font partie de la culture mathématique des élèves, cette fonction est intéressante dans la mesure où elle ébranle l'idée que les paramètres suffisent à eux seuls à étudier une fonction. Il y a dans cette fonction une façon de passer à autre chose et de mettre à l'épreuve cette conception, bref de la problématiser (analyser en tant que problème). Avec l'exemple proposé $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, tracer un graphique à l'aide des paramètres n'est plus possible (par exemple à partir de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$). En effet, bien qu'en apparence la fonction ressemble à ce qui pourrait être vu au secondaire, elle ne fait pas partie du territoire du secondaire. Mais ce travail ne relève pas non plus du territoire du collégial. Il s'agirait donc, selon nous, d'un « entre-deux ». Comment tracer le graphique de ces fonctions qui ne sont ni du territoire du secondaire ni de celui du premier cours de calcul au collégial ? Autrement dit, un nouveau travail semble à la jonction entre le secondaire et le collégial, celui de développer une intuition pour comprendre le comportement d'une fonction à partir d'une expression algébrique et permettre d'esquisser directement le graphique sans passer par les paramètres (puisqu'ils sont inopérants ici), non plus que par l'attirail d'outils du premier cours de calcul (la dérivée et tout ce qui vient avec). Cette discussion permet au groupe d'enseignants des deux ordres d'élaborer une activité plus concrète.

2.3 Élaboration d'une activité de transition

À la suite de la discussion à propos des « vides » à combler, les enseignants s'engagent dans l'élaboration de situations d'enseignement. Les enseignants du secondaire travaillent sur le vide à combler au secondaire et les enseignantes du collégial, sur le vide à combler au collégial.

Les enseignantes du collégial proposent une tâche en plusieurs étapes. D'abord, (1) elles proposent de donner aux étudiants des fonctions de base à tracer, ensuite (2) de tracer trois fonctions qui ont subi des transformations linéaires ou des dilatations. Finalement, (3) elles proposent une série de nouvelles fonctions à tracer intuitivement comme $(1+x)/x$, une fonction que les élèves du secondaire connaissent, mais écrite sous une forme différente : « Mais on se demandait s'ils verraient que $(1/x) + 1$, c'est la même chose. On voulait juste voir si d'autres formes de représentations algébriques ça les... [sous-entendu ça les gênerait, et comment ils les gèreraient] » (Corinne, enseignante du collégial). Cette idée vient en quelque sorte mettre en lumière les limites, pour le collégial, de l'étude des familles de fonctions telle qu'elle est faite au secondaire. En effet, les familles de fonctions du secondaire se reconnaissent par des caractéristiques visibles dans le graphique, dans le tableau de valeurs lorsqu'il est présenté d'une certaine façon. Or, ici, dans la perspective du secondaire, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est visuellement (dans la règle) très proche de ce qui a pu être fait au secondaire. Ce choix est intéressant aussi dans la mesure où il vient ébranler une conception des étudiants (selon Corinne), dès qu'il s'agit d'une rationnelle, les étudiants pensent que c'est une fonction qui a des asymptotes verticales. Ainsi, les enseignantes du collégial tentent de problématiser ce qui est connu des étudiants : élargir cette idée de familles de fonctions, ébranler cette idée de paramètres « a, b, h et k ». En effet, il n'est pas question d'une transformation linéaire dans ce qu'ont proposé les enseignantes. C'est plus complexe, c'est une composition de fonctions.

D'autres fonctions sont aussi proposées avec l'idée d'en introduire de nouvelles et, éventuellement, de créer le besoin de recourir à de nouveaux outils. Le tableau 1 présente les fonctions proposées par les enseignantes du collégial et la progression pensée par elles, au sein du groupe.

Tableau 1 – Élaboration d'une activité d'harmonisation (Corriveau, 2013 [4], p. 283)

Les enseignantes entrent sur le territoire du secondaire avec des fonctions de base à esquisser dans le graphique.	1. Esquisser le graphique de fonctions de base (connue) $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
Les enseignantes poursuivent dans le territoire du secondaire avec des fonctions de base qui ont subi des transformations.	2. Pousser en complexifiant… un peu ! $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $f(x) = (x-3)^2 + 2$.
Les enseignantes introduisent des éléments hybrides : elles se situent encore dans le territoire du secondaire (fonction connue), mais on rentre sur le registre algébrique pour pouvoir tracer la courbe, plutôt de l'ordre du collégial.	3. Varier l'écriture $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$.
Les enseignantes introduisent de nouvelles fonctions, guidées par ce qui a été fait au secondaire : ébranler le concept de famille de fonctions, de paramètres et la conception qu'une fonction rationnelle a nécessairement une asymptote verticale.	4. Introduire de nouvelles fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{x^2}$, $f(x) = \dfrac{1}{e^{x^2}}$.

Ce travail de réflexion, fait au sein du groupe amènera une des enseignantes du collégial qui donne le cours de calcul différentiel (et une des auteures du texte) à peaufiner l'activité élaborée conjointement pour la proposer à ses étudiants. Dans ce qui suit, nous présentons la situation d'enseignement telle qu'elle a été présentée aux étudiants et analysons ce qu'il en ressort.

3 De la réflexion à l'action : regard sur le travail des étudiants en transition

Dans ce qui suit, nous présentons d'abord l'activité telle qu'elle a été faite avec des étudiants. Ensuite, nous analysons en détail le travail d'étudiants autour d'une fonction en particulier. Dans un troisième temps, nous partageons nos observations de l'activité des étudiants en lien avec la tâche prise globalement.

3.1 Le jeu transition

Dans cette partie, on va d'abord présenter une lecture générale de notre dispositif, puis dans une deuxième on présentera une perception didactique de chacune des quatre parties formant notre situation.

La situation d'enseignement présentée ici est l'activité d'introduction proposée aux étudiants lors de la première rencontre du cours de calcul différentiel. Cette activité a été faite à plusieurs reprises depuis quelques années. Les étudiants dont nous analysons les productions proviennent d'un groupe d'une quarantaine d'étudiants inscrits dans un programme math-info. Ils ont suivi le cours calcul différentiel à l'automne 2017.

L'activité leur est proposée sous forme de défi. Placés en groupe de trois ou quatre étudiants, ils reçoivent une première bandelette de papier, verte, sur laquelle il y a trois fonctions à tracer. Une fois que l'esquisse des trois fonctions est validée avec l'enseignante (celle-ci vérifie le tracé et questionne les étudiants au besoin), ils reçoivent une deuxième bandelette de papier, jaune, avec trois autres fonctions. Les fonctions deviennent plus complexes d'un niveau de bandelette à l'autre (figure 3).

Sans calculatrice, tracez une esquisse des fonctions suivantes :
1) $f(x) = x^2$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 3) $f(x) = \sqrt{x}$

Sans calculatrice, tracez une esquisse des fonctions suivantes :
4) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ 5) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 6) $f(x) = (x+3)^2 - 2$

Vous vous pensez bien bons ? ! Essayez celles-ci :
7) $f(x) = x^3$ 8) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x}$

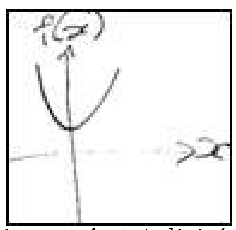
Pour les pros seulement !
9) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 10) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 11) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

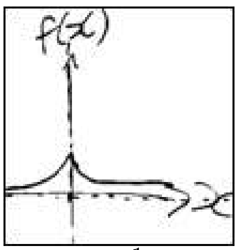
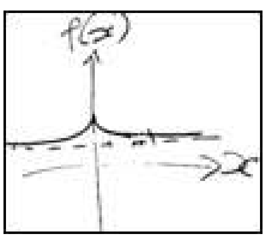
FIGURE 3 – Activité telle que proposée aux étudiants

3.2 Analyse des discussions d'étudiants autour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

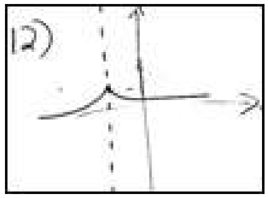
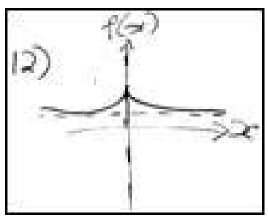
Dans ce qui suit, nous retraçons l'activité d'une équipe d'étudiants qui tentent d'esquisser le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Nous présentons l'analyse de cette activité dans le tableau (2) situé ci-après. On y trouve la progression de l'esquisse (colonne 1), des extraits des discussions entre les étudiants (colonne 1) et finalement, notre analyse vis-à-vis le déroulement (colonne 2).

TABLEAU 2 – Activité des étudiants entourant l'esquisse du graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Esquisse et discussion entre les étudiants	***Analyse***
 *E1 : Ça fait que c'est 1 divisé par ça"* *[...]* *E1 : Comme ici [le sommet] ce serait un. 1 divisé par 1, ça donnerait 1 le point ici [(0,1)]"*	Les étudiants tracent d'abord la fonction x^2+1 et se demandent à quoi ressemblera la courbe puisqu'ils ont l'expression $\dfrac{1}{x^2+1}$ à esquisser. Ils tentent d'opérer graphiquement sur les fonctions. Ils déduisent le point en $x=0$ en remplaçant mentalement la valeur de x par 0 dans l'expression et obtiennent les coordonnées (0,1)). Pour eux, la forme du graphique de la fonction $\dfrac{1}{x^2+1}$ sera la même que celle du graphique de la fonction $\dfrac{1}{x^2}$. Implicitement, cela renvoie à une
suite à l'autre page	

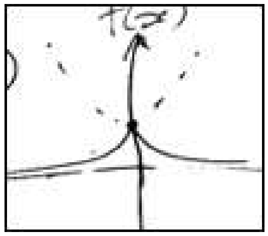
Esquisse et discussion entre les étudiants	***Analyse***
E1 : Bien ça doit faire comme celle-là . [il pointe la fonction $\frac{1}{x^2}$ (fonction #9) déjà tracée auparavant, voir ci-dessous]. [...] *E1 : Je pense qu'il y a une asymptote... Parce que ça ne peut pas être négatif.*	idée de transformation sur une fonction de base (comme au secondaire). De plus, ils réinvestissent la réflexion faite lors de l'esquisse de la fonction $\frac{1}{x^2}$ pour conclure que la fonction ne peut être négative.
 Tracé de la fonction $\frac{1}{x^2}$ obtenu précédemment.	Cette caractéristique semble pour eux renvoyer à l'idée qu'il y aura donc une asymptote horizontale. Il est à noter également que le graphique ne semble pas représenter une asymptote verticale en $x = 0$. Or, les pointillés et le travail accompagnant le tracé de l'esquisse montrent qu'ils considèrent qu'il y a bel et bien une asymptote.
 *E1 : Je pense que c'est juste l'asymptote qui monte. Parce que justement, mettons le x, il augmente beaucoup... E2 : ... ouin... + 1... Ok, et puis, ce serait quoi ton point d'origine ici* [il pointe le sommet]. Silence [...] *E1 : Ben, il n'y en pas. Puis, ça ne peut pas être eh...* *E2 : Ce n'est pas (0,0) ?* *E1 : Non.*	Les étudiants effacent leur esquisse pour la retracer en déplaçant verticalement la fonction (une translation de 1 vers le haut). Cette action met en évidence qu'ils associent le « + 1 » dans l'expression au paramètre appelé k au secondaire. De plus, l'étudiant 2 se demande quelles seront les coordonnées du point à l'origine. Rappelons qu'il a en tête que ce doit être $(0, 1)$, mais que ce déplacement affecterait ses coordonnées. Or, l'étudiant 1 rejette l'idée d'un point d'origine puisqu'il semble maintenant considérer qu'il y a aussi une asymptote en $x = 0$ puisque pour lui, la fonction devrait correspondre visuellement à l'esquisse tracée pour

suite à l'autre page

Esquisse et discussion entre les étudiants	***Analyse***
 *E1 : Ah, elle ne monte pas, elle se tasse.* [Il efface la courbe qu'il avait tracée.] *Elle se tasse horizontalement.*	la fonction $\frac{1}{x^2}$. Pour lui, la fonction $\frac{1}{x^2}$ correspondrait à la fonction de base d'une nouvelle famille de fonction dont la fonction $\frac{1}{x^2+1}$ ferait partie. Cependant, le questionnement de l'étudiant 2 semble le mettre en doute. L'équipe rejette cette esquisse.
 E1 efface la courbe qu'il vient de tracer. *E2 : Tu corriges ?* *E1 : Ouais. Je pense que c'était correct au début que ça monte avec une asymptote.* [Il retrace le même graphique que l'esquisse 3.] *E2 : Donc, ça ferait juste monter. Il resterait juste l'origine.* *E1 : Ouais. Ce n'est pas le h, c'est le k qui ? ? ?* *E2 : Donc là, je ne comprends pas le point d'origine, ça serait là* [il pointe le sommet qui n'est plus en $(0,1)$] ? [...] *E2 : J'essaie juste de trouver c'est quoi le point d'origine.* *E1 : Ben, il n'y a pas de sommet. Ici tu sais, il n'y a rien* [il pointe l'asymptote verticale]. *E2 : Il y a juste rien ? !* *E1 : Non, ça fait juste tendre vers cette valeur-là !* *E2 : Ok, ok ! Tu as une asymptote* [verticale en $x = 0$]. *Je n'avais pas vu l'asymptote ici.*	Pour l'étudiant 1, si le « + 1 » ne correspond pas à une translation verticale, alors ce doit être une translation horizontale (liée au paramètre appelé h au secondaire). Cependant, il changera d'idée et reprendra le tracé initial (voir esquisse 5). L'étudiant 2 accepte la version de l'étudiant 1, sauf en ce qui concerne ce qui se passe à l'origine . « Donc, ça ferait juste monter. Il resterait juste l'origine (sous-entendu à déterminer) ». L'étudiant 1 confirme notre hypothèse de départ, il mentionne clairement qu'il n'y a pas de valeur en $x = 0$ puisqu'il y a une asymptote verticale. Autrement dit, la première conclusion du point en $(0,1)$ est complètement abandonnée au profit d'une transformation à partir d'un graphique de la fonction « de base » $\frac{1}{x^2}$. Ainsi, on peut penser que l'interprétation de la fonction $\frac{1}{x^2+1}$ en termes de famille de fonctions et de paramètre a pris le pas sur le travail algébrique (fait mentalement) du début.
	suite à l'autre page

Esquisse et discussion entre les étudiants	***Analyse***
L'enseignante arrive dans l'équipe. *E1 : Bien, moi je m'étais dit que c'est eh…* *Tu prenais juste la…*[pointe la fonction]. *E2 : C'est comme si le 1 c'était le k.* *Ens : Ok.* *E2 : Ça fait que ça fait monter de « 1 » l'asymptote* [horizontale]. *Ens : Ok. Ça fait que pour vous, ça ressemble à ça* [pointe le graphique pour la fonction] *translaté ?*	L'étudiant 2 confirme que pour les étudiants, le « +1 » correspond ou bien au paramètre h ou bien au paramètre k (ils décident d'y aller pour le k). Ce sera donc la raison de la translation verticale du graphique de la fonction « de base » $\frac{1}{x^2}$.
Tous : Ouin… *Ens : Ça fait que pour vous, la fonction n'est pas définie à zéro ?* Silence. *Ens : Es-tu* [s'adressant à E1] *capable de l'évaluer à zéro* [sous-entendu la fonction] *?* *Ça donne quoi… Ça donne quelque chose qui ne marche pas ?* L'enseignante laisse l'équipe en réflexion. E2 efface le graphique pour recommencer.	L'enseignante questionne la présence d'une asymptote verticale en demandant aux étudiants d'évaluer la fonction en $x = 0$ (évaluation qu'ils avaient déjà faite, mais abandonnée au profit de la transformation de la fonction $\frac{1}{x^2}$).
E1 trace un nouveau graphique en commençant par tracer une asymptote verticale en $x = -1$ (voir l'esquisse 4). *E2 : Je veux voir si ça peut donner…* *E1 : Pour que ça donne zéro. Il faudrait que ce soit eh…* *E2 : Faut voir quand…* [sous-entendu] *E1 : Vu que c'est à la deux.*	Devant la contradiction, les étudiants s'engagent dans la recherche d'une asymptote verticale. Ainsi, ils se demandent pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $x^2 + 1 = 0$.
E2 : Il faut voir quand ça peut être égale à moins un. Non. ? ? ? *E1 : Il n'y a juste pas de zéro* *E2 : Il n'y a pas de zéro.* *E1 : Il n'y en a juste pas !* E2 efface à nouveau leur tentative.	Réalisant que l'équation n'a pas de solution, les étudiants sont confrontés à la limite de leur interprétation en termes de paramètres h et k :
Réflexion. ***E2 : À quoi il sert le + 1 d'abord ?***	« À quoi il sert le +1 d'abord ? »

suite à l'autre page

Esquisse et discussion entre les étudiants	***Analyse***
 *E1 : Là, ça serait de même, je pense, sauf qu'il n'y a pas d'asymptote.* [Il trace un point fermé en (0, 1).]	Bien que le tracé ne soit pas celui attendu, l'étudiant abandonne l'idée de se référer au tracé de la fonction $\frac{1}{x^2}$. De plus, il reconnaît que la fonction existe en $x = 0$.

En somme, le travail fait au secondaire est réinvesti par les étudiants pendant le travail. D'abord, ils se réfèrent à une fonction qui, algébriquement semble avoir la même forme. Ainsi, il est sous-entendu que le "+ 1" ici réfère soit à une translation verticale – le k – soit à une translation horizontale – le h. Autrement dit, ils ont l'impression que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ constitue en soi une nouvelle famille de fonctions.

3.3 Point de vue global

À travers le travail d'esquisses de fonctions, les étudiants témoignent de différentes pratiques provenant parfois de manières de faire héritées du secondaire. Si ces pratiques étaient cohérentes avec les visées du secondaire, au collégial, elles atteignent leur limite. Ainsi, penser le passage des unes aux autres nous semble important. Voici donc quelques observations plus globales.

À propos des trois premières fonctions

Sans calculatrice, tracez une esquisse des fonctions suivantes :
1) $f(x) = x^2$ 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 3) $f(x) = \sqrt{x}$

L'esquisse des premières fonctions se fait aisément par les étudiants. Toutefois, nous remarquons que plusieurs équipes tracent les fonctions uniquement dans le premier quadrant (ex. une seule branche de la fonction quadratique, de la fonction rationnelle).

À propos des trois fonctions suivantes

Sans calculatrice, tracez une esquisse des fonctions suivantes :
4) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ 5) $f(x) = \sqrt{x+1}$ 6) $f(x) = (x+3)^2 - 2$

L'esquisse de ces fonctions, qui convoquent des notions du secondaire, se fait encore plus aisément par les étudiants. Les équipes s'attardent aussi à la partie négative des fonctions. L'effet des paramètres dans le graphique est bien maîtrisé. Nous devons tout de même mentionner que nous avons observé une équipe qui produisait des quadratiques pour chacune des fonctions. Après discussion avec l'enseignante, notamment en évaluant des valeurs en y pour des valeurs en x données, tout est rentré dans l'ordre.

À propos des deux fonctions ci-dessous

Vous vous pensez bien bons ? ! Essayez celles-ci :
7) $f(x) = x^3$ 8) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x}$

Pour esquisser ces fonctions, les étudiants ont dû réajuster le travail fait au secondaire. D'abord, les deux fonctions sont nouvelles. Pour la fonction 7, les étudiants se servent de ce qu'ils connaissent de la quadratique pour tracer la fonction cubique. Or, la gestion de la partie négative n'est pas facile. Certains tracent une courbe qui ressemble à une parabole (un peu plus aplatie). En discutant avec l'enseignante, notamment autour d'un exemple précis (ex. $x = -1$), ils se rendent compte que la branche tracée dans le deuxième quadrant devrait être située dans le troisième. Pour la fonction 8, les étudiants arrivent facilement à simplifier l'expression et obtiennent une fonction polynomiale de degré 2. Bien qu'ils tracent aisément la courbe, ils perdent de vue la restriction de la fonction initiale ($x \neq 0$). Lorsque l'enseignante valide les courbes tracées, elle demande si la fonction 8 tracée est belle et bien équivalente à la fonction initiale, en tout point. Les étudiants arrivent à formuler qu'en zéro, la fonction n'est pas définie. Or, la plupart esquissent des asymptotes autour de $x = 0$. Ainsi, pour eux, lorsqu'une fonction n'est pas définie en une valeur du domaine, cela signifie qu'il y a asymptote. Ce sera en observant ce qui se passe autour de zéro que certains arriveront à identifier un trou.

À propos des dernières fonctions

Pour les pros seulement !
9) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 10) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 11)$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Pour esquisser la fonction 9, plusieurs étudiants utilisent comme référence la fonction rationnelle vue au secondaire et tracée au numéro 2. Or, la gestion de la branche négative pose encore une fois problème. Plusieurs étudiants tracent la branche de la partie négative dans le troisième quadrant. Une courte intervention de l'enseignante suffit pour leur faire réaliser que la fonction ne peut admettre de valeurs négatives. Pour la fonction 10, les étudiants utilisent leur connaissance à propos des réciproques (et notamment la réciproque d'une quadratique, la racine carrée) pour tracer la fonction. Comme pour la racine carrée, certains font disparaître une branche ! L'évaluation de la fonction en quelques valeurs du domaine leur permet de réaliser que les deux branches sont conservées. Quant à la fonction 11, à peu près tous les étudiants utilisent la fonction tracée au numéro 9 comme fonction de base et se questionnent quant au « + », à savoir s'il s'agit d'un h ou d'un k !

4 Conclusion

Le travail fait par les étudiants permet certainement de faire un retour sur ce qui a été vu au secondaire, notamment sur les fonctions de base. De plus, observer les étudiants permet de constater ce qui est maîtrisé et ce qui est encore en voie de l'être. Par exemple, il n'est pas naturel pour les étudiants d'évaluer une fonction à partir des valeurs du domaine pour valider leur tracé. L'accompagnement de l'enseignante leur a donc permis de rappeler cette stratégie et de la mettre en œuvre. Il en est de même pour la notion d'exposant. Bien que les étudiants sachent que des exposants entiers correspondent à une multiplication répétée, pour certains, comme cette notion est utilisée dans le cadre des fonctions, ils perdent de vue cette définition. D'autant que les opérations avec exposants sont vues au début du secondaire. Cette activité permet aussi de faire réaliser qu'une fonction n'est pas uniquement définie dans le premier quadrant. Les étudiants qui arrivent du secondaire ont souvent travaillé les fonctions à travers des contextes et situations concrètes. Ainsi, la partie négative est souvent peu utile pour modéliser le phénomène ou résoudre un problème. Cette activité permet donc de rompre rapidement avec cette habitude développée au secondaire. Finalement, nous croyons que cette activité permet de problématiser la notion de paramètre si importante au secondaire, mais qui ne sera plus aussi utile dans le cours de calcul différentiel au cégep.

Remerciements : tous nos remerciements vont à Nadine, Denis, Christian, Stéphane, Diane et aux enseignants du projet ARIM.

Cette recherche a reçu l'aide financière du ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur dans le cadre du programme « Actions concertées » du Fonds de Recherche Québécois Société Culture et du Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (2017-PO-202613).

Références

[1] Coppé, Dorier et Yavuz (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* Vol 27 (2). pp 151-186.

[2] Corriveau, C. (2017). Secondary-to-tertiary comparison through the lens of ways of doing mathematics in relation to functions : a study in collaboration with teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 94(2), 139-160.

[3] Corriveau C. (2015) Aborder les questions de transition dans une perspective d'harmonisation. In Theis L. (Dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – Spé3* (p. 982-993). Alger (Algérie) : Université des Sciences et de la Technologie de Houari Boumediene.

[4] Corriveau, C. (2013). Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethnométhodologique pour explorer la transition secondaire-collégial (Thèse de doctorat inédite). Université du Québec à Montréal, Montréal, QC.

[5] Ministère de l'Éducation, des Loisirs et des Sports. Gouvernement du Québec (2007). *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, deuxième cycle.*

[6] Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 149-185.